# ALGORITMO CONJUNTO KALMAN–WAVELETS PARA EL FILTRADO DEL RUIDO EN SEÑALES

Guillermo La Mura†, Ricardo O. Sirne‡ y Eduardo P. Serrano†‡

*†Centro de Matemática Aplicada, Universidad Nacional de San Martín, 25 de Mayo y Francia, 1650 San Martín, Buenos Aires, Argentina, guillermo.lamura@gmail.com*
*‡Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, Av. Paseo Colón 850, 1063 Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina, rsirne@fi.uba.ar*
*†‡Escuela Superior Técnica del Ejército "General Manuel N. Savio", Instituto de Enseñanza Superior del Ejército, Av. Cabildo 15, 1426 Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina – Centro de Matemática Aplicada, Universidad Nacional de San Martín, 25 de Mayo y Francia, 1650 San Martín, Buenos Aires, Argentina, eduardo.eduser@gmail.com*

Resumen: En este trabajo proponemos un algoritmo para el filtrado de ruido en señales que, combinando el método de Kalman con el procesamiento con wavelets, aprovecha las ventajas relativas de ambos métodos.

Palabras claves: *filtrado de ruido, filtro Kalman, wavelets*
2000 AMS Subjects Classification: 42C40

## 1. INTRODUCCIÓN

Considerando el problema del filtrado del ruido en señales, interesa aprovechar la estimación óptima dada por el filtrado de Kalman y la posibilidad de filtrar usando onditas (wavelets) en el marco del análisis de multirresolución (AMR). En [8] hemos presentado una metodología de procesamiento que si bien es sub-óptima desde el punto de vista de Kalman, aprovecha ambas herramientas en forma conjunta con bajo costo computacional. En este trabajo proponemos filtrar el ruido de medición en base a la construcción de un modelo sistémico que permite trabajar con los coeficientes del desarrollo en serie de onditas.

## 2. MÉTODOS DE FILTRADO

En esta sección especificamos los dos tipos de filtrado que proponemos combinar, definimos la nomenclatura y sintetizamos los métodos de trabajo requeridos para su aplicación en forma individual.

### 2.1. MULTIRRESOLUCIÓN Y FILTRADO CON WAVELETS

Consideremos la representación en serie de onditas (wavelets) ortogonales de una señal $s_0$ en el marco de un análisis de multirresolución (AMR) con función de escala $\phi$ [5, 9]. Denotamos $V_j \subset V_{j-1}$ con $j \in \mathbb{Z}$ a los subespacios encajados del AMR; siendo la ondita $\psi$ ortogonal, resulta $V_{j-1} = W_j \oplus V_j$, donde $W_j$ es el complemento ortogonal de $V_j$ respecto de $V_{j-1}$. Con este esquema, suponiendo $s_0 \in V_0$:

$$s_0 = r_1 + \cdots + r_J + s_J \quad \text{con} \quad r_j \in W_j \quad \text{y} \quad s_J \in V_J \quad \text{para todo } J \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

donde

$$r_j(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k}\, 2^{-j/2}\, \psi(2^{-j}t - k) \quad \text{y} \quad s_J(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{J,k} 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - k)\,; \tag{2}$$

$r_j$ es la señal residual correspondiente al nivel de resolución $j$ (proyección de $s_0$ sobre $W_j$) y $s_j$ la proyección de $s_0$ sobre $V_j$.

En particular, cuando se usa la ondita de Haar resulta:

$$\phi(t) = 1 \text{ si } t \in [0,1) \quad \text{y} \quad \phi(t) = 0 \text{ si } t \notin [0,1)\,, \text{ con } \psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t-1)\,; \tag{3}$$

siendo $\phi(n) = \delta_n$ para $n \in \mathbb{N}$, con $\delta_0 = 1$ y $\delta_n = 0$ si $n \neq 0$.

En este caso los coeficientes se calculan recursivamente mediante:

$$c_{j,k} = 2^{-1/2}(c_{j-1,2k} + c_{j-1,2k+1}) \quad \text{y} \quad d_{j,k} = 2^{-1/2}(c_{j-1,2k} - c_{j-1,2k+1}) \tag{4}$$

donde, si la señal se analiza en bloques de $2^J N$ valores, corresponden $2^{J-j} N$ coeficientes de cada tipo en el nivel $j$ de resolución ($j = 1, ..., J$). Desde (2) resulta $s_0(k) = \sum_n c_{0,n}\phi(k-n) = \sum_n c_{0,n}\delta_{k-n} = c_{0,k}$; es decir, el proceso inicia tomando los valores de la señal muestreada como coeficientes de nivel 0.

En este contexto si la señal $s_0(k) = s_{0,k}$ está contaminada con ruido aditivo $v_k$, de media nula y desvío $\sigma$, con sólo suponer que $v_k$ y $v_{k+i}$ son incorrelacionados para $i \neq 0$ los coeficientes del AMR –según (4)– también resultan con ruido aditivo de igual media y desvío $\sigma$. En particular, si el ruido es gaussiano los coeficientes también lo son.

Teniendo en cuenta que la señal tiene un contenido frecuencial en un intervalo [$f_{mín}, f_{máx}$], el análisis de multirresolución se realiza para los niveles $j = 1, ..., J$ de modo que $s_J$ sea despreciable desde el punto de vista energético. Entonces, para la reconstrucción, en (1) puede considerarse:

$$s_0 \cong r_1 + \cdots + r_J \; ; \tag{5}$$

la estrategia del filtrado con wavelets consiste en realizar esta reconstrucción calculando las señales residuales aplicando (2) con coeficientes $\overline{d}_{j,k}$ que se obtienen desde los $d_{j,k}$ mediante:

$$\overline{d}_{j,k} = \begin{cases} sg(d_{j,k})L(|\,d_{j,k}\,|) & \text{si} \quad |\,d_{j,k}\,| \geq \alpha_j \\ 0 & \text{si} \quad |\,d_{j,k}\,| < \alpha_j \end{cases} \tag{6}$$

donde $L$ generalmente es una función lineal [6, 9] y $\alpha_j$ es el umbral para el nivel de resolución $j$. Este filtrado es eficiente cuando la energía de la señal está concentrada en determinados niveles de resolución.

## 2.2. FILTRADO DE KALMAN

Mediante el método recursivo de Kalman [3, 4] se logra, minimizando el error cuadrático medio, el filtrado óptimo del ruido de un proceso estocástico cuyo modelo es un sistema lineal discreto del tipo:

$$\begin{cases} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k + w_k \\ y_k &= H_k x_k + v_k \end{cases} , \tag{7}$$

donde $x_k$, $u_k$ e $y_k$ representan respectivamente el *estado*, el *control* y la *observación* (*medición*) del sistema en el tiempo discreto $k \in \mathbb{Z}$. En general $A_k \in \Re^{n\times n}$, $B_k \in \Re^{n\times p}$ y $H_k \in \Re^{m\times n}$ son funciones no aleatorias del tiempo; $x, w \in \Re^{n\times 1}$, $y, v \in \Re^{m\times 1}$, $u \in \Re^{p\times 1}$, mientras que $w_k$ y $v_k$ son ruidos blancos gaussianos tales que [1]:

$$\begin{cases} E[w_k\; w_{k+n}^t] = \delta_n\, Q \quad \forall k, n \in \mathbb{Z} & , \quad E[w_k] = 0 \;\; \forall k \in \mathbb{Z} \\ E[v_k\;\; v_{k+n}^t] = \delta_n\, R \quad \forall k, n \in \mathbb{Z} & , \quad E[v_k] = 0 \;\; \forall k \in \mathbb{Z} \\ E[x_0\; w_k^t] = E[x_0\; v_k^t] = 0 \;\; \forall k \in \mathbb{Z} & \\ E[w_k\; v_n^t] = 0 \;\; \forall k, n \in \mathbb{Z} & \end{cases} \tag{8}$$

donde $Q \in \Re^{n\times n}$ y $R \in \Re^{m\times m}$ son las matrices constantes de covarianza de los ruidos que perturban al modelo ($w$) y a las mediciones ($v$) respectivamente.

Siendo $\hat{x}_k^-$ la estimación *a priori* de $x_k$ obtenida en base a las mediciones $y_i$ para tiempo discreto $i < k$, denotaremos $\hat{x}_k$ a la estimación *a posteriori* de $x_k$ cuando se conoce $y_k$. El esquema de Kalman establece un proceso iterativo de estimación que contempla los siguientes cálculos para $k \in \mathbb{N}$:

$$\text{predicción}\begin{cases}\hat{x}_k^- &= A_{k-1}\hat{x}_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1}\\ P_k^- &= A_{k-1}P_{k-1}A_{k-1}^t + Q_{k-1}\end{cases} \quad \text{y corrección}\begin{cases}K_k &= P_k^- H_k^t[H_k P_k^- H_k^t + R_k]^{-1}\\ \hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + K_k(y_k - H_k\hat{x}_k^-)\\ P_k &= (I_n - K_k H_k)P_k^-\end{cases} \tag{9}$$

donde $I_n \in \Re^{n\times n}$ es la matriz identidad. Para comenzar el procedimiento deben definirse los valores iniciales $\hat{x}_0$ y $P_0$, para ello es posible elegir $\hat{x}_0 = E[x_0] = 0$ y $P_0 = X_0$; si el sistema dinámico es uniformemente completamente observable y controlable, una condición inicial $P_0 \geq 0$ pierde influencia a medida que crece la cantidad de mediciones procesadas [1].

## 3. ALGORITMO CONJUNTO KALMAN–WAVELETS

Dado que el filtrado de Kalman y el de wavelets son radicalmente distintos, resulta atractivo combinar ambos métodos con la intención de potenciar sus ventajas para cierto tipo de señales, correspondientes a sistemas lineales modelados según se indica en la sección 2.2.

Trabajando ambos filtrados individualmente, si primero se aplica Kalman y luego se filtra con wavelets cada componente estimada del estado del sistema, el primer filtrado lograría la relación señal/ruido óptima para cada componente, pero esto no asegura dicha optimización para cada residual en las diferentes escalas del AMR. Por otra parte, filtrando primero con wavelets cada componente observada –de $y_k$ según (7)– no es posible asegurar que la reconstrucción obtenida mediante (5) y (6) cumpla con las hipótesis necesarias para la posterior aplicación del procesamiento de Kalman (modelo y tipo de ruido).

La idea clave de nuestra propuesta consiste en generar –a partir de (7)– un modelo sistémico para los coeficientes del AMR. Esto permite aplicar Kalman en cada nivel de resolución para luego implementar la reconstrucción de cada componente del estado filtrando con wavelet sobre los coeficientes ondita. Para ello, en el sistema lineal (7), cada componente del estado $x$ es una señal del tipo $s_0$ que se procesa en el marco de un AMR.

Ilustremos el primer paso del modelo sistémico propuesto. Según 2.1, para la ondita de Haar los coeficientes de nivel 0 coinciden con los valores de la señal; por lo tanto dichos coeficientes para cada componente de $x$ se puede agrupar en un vector $C_0 = x$ que cumple con (7). Si las matrices $A,B,H$ son constantes y el ruido del sistema ($w$) es despreciable, denotando $U_0^C = Bu$, $V_{0,k}^C = v_k$ y $A_{[0]} = A$ resulta:

$$C_{0,k+1} = A_{[0]}\, C_{0,k} + U_{0,k}^C \;\;,\;\; y_{0,k} = H C_{0,k} + V_{0,k}^C \;\;; \tag{10}$$

entonces $C_{0,2k+3} = A_{[0]}\,(\underbrace{A_{[0]}\,C_{0,2k+1} + U_{0,2k+1}^C}_{C_{0,2k+2}}) + U_{0,2k+2}^C = A_{[0]}^2\, C_{0,2k+1} + \underbrace{A_{[0]}\,U_{0,2k+1}^C + U_{0,2k+2}^C}_{a_0}$. Análogamente resulta $C_{0,2k+2} = A_{[0]}^2\, C_{0,2k} + \underbrace{A_{[0]}\,U_{0,2k}^C + U_{0,2k+1}^C}_{b_0}$. Luego aplicando (4) a los vectores, se obtiene:

$$\begin{cases}C_{1,k+1} = A_{[1]}\; C_{1,k} + U_{1,k}^C\\ D_{1,k+1} = A_{[1]}\; D_{1,k} + U_{1,k}^D\end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases}y_{1,k}^C = H\; C_{1,k} + V_{1,k}^C\\ y_{1,k}^D = H\; D_{1,k} + V_{1,k}^D\end{cases} \tag{11}$$

donde $A_{[1]} = A_{[0]}^2$, $U_{1,k}^C = (a_0 + b_0)/\sqrt{2}$, $U_{1,k}^D = (a_0 - b_0)/\sqrt{2}$ y $D_1$ es el vector de los coeficientes detalle de las componentes del estado del sistema para el nivel de resolución 1; el ruido se comenta en nota final.

El modelo sistémico general para niveles de resolución $j \geq 1$ resulta:

$$\begin{cases} C_{j+1,k+1} = A_{[j+1]}\ C_{j+1,k} + U^C_{j+1,k} \\ D_{j+1,k+1} = A_{[j+1]}\ D_{j+1,k} + U^D_{j+1,k} \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} y^C_{j+1,k} = H\ C_{j+1,k} + V^C_{j+1,k} \\ y^D_{j+1,k} = H\ D_{j+1,k} + V^D_{j+1,k} \end{cases} \tag{12}$$

donde $A_{[j+1]} = A^2_{[j]}$, $U^C_{j,k} = (a_{j-1} + b_{j-1})/\sqrt{2}$, $U^D_{j,k} = (a_{j-1} - b_{j-1})/\sqrt{2}$, $a_j = A_{[j]} U^C_{j,2k+1} + U^C_{j,2k+2}$, $b_j = A_{[j]} U^C_{j,2k} + U^C_{j,2k+1}$, siendo $C_{j+1}$, $D_{j+1}$ los vectores de los coeficientes del AMR de las componentes del estado del sistema para el nivel de resolución $j+1$.

Respecto a los vectores de ruido, para $j \geq 1$ son:

$$V^C_{j,k} = 2^{-1/2}(V^C_{j-1,2k} + V^C_{j-1,2k+1}) \quad \text{y} \quad V^D_{j,k} = 2^{-1/2}(V^C_{j-1,2k} - V^C_{j-1,2k+1}) \tag{13}$$

que, con las hipótesis dadas en la sección 2.2, son gaussianos con media nula y la misma matriz de covarianza *R* que perturba a las mediciones del sistema.

## 4. CONCLUSIONES

Existen varias propuestas para resolver problemas relacionados con el análisis de señales usando onditas y/o filtros de Kalman. Esquemas recursivos de filtrado y predicción usando onditas [7], métodos de estimación de señales fractales usando wavelets [2], de estimación de movimiento Browniano fraccionario con filtros de Kalman usando onditas [10], con esquema combinado sub-óptimo Kalman–Haar [8]. El modelo propuesto en este trabajo, dado que el filtrado se aplica por niveles, combina las ventajas de ambos métodos resultando eficiente para señales con composición frecuencial concentrada en algunos niveles de resolución. Tal es el caso, como en [8], de señales que resultan de la superposición de ondas sinusoidales.

## REFERENCIAS


[1] C.E. D'Attellis, *Estimadores Óptimos y sus Aplicaciones*, CONICET, Argentina, 1981.

[2] G.A. Hirchoren G.A., C.E. D'attellis, *Estimation of Fractal Signals Using Wavelets and Filter Banks*, IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 46, N° 6 (1998), pp. 1624-1630.

[3] R.E. Kalman, *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*, Trans. ASME-Journal of Basic Engineering, 82 (1960), pp. 35-45.

[4] R.E. Kalman, R.S. Bucy, *New Results in Linear Filtering and Prediction Theory*, Trans. ASME-Journal of Basic Engineering (1961), pp. 95-108.

[5] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, 1998.

[6] S. Postalcioglu, K. Erkan, E.D. Bolat, *Comparison of Kalman Filter and Wavelet Filter for Denoising*, International Conference on Neural Network and Brain, Beijing, China, Vol. 2 (2005), pp. 951-954.

[7] O. Renaud, J. Starck, F. Murtagh, *Wavelet-Based Combined Signal Filtering and Prediction*, IEEE Trans. on Sytems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, Vol. 35, Issue 6 (2005), pp. 1241-1251.

[8] A. Viegener, R.O. Sirne, E.P. Serrano, M. Fabio, C.E. D'Attellis, *Algoritmo conjunto Kalman–Haar aplicado al procesamiento de señales*, trabajo presentado en el XVII International Symposium on Mathematical Methods Applied to the Sciences (XVII SIMMAC), San José de Costa Rica, 16-19 de febrero de 2010; en revisión para su publicación en la Revista Matemática: Teoría y Aplicaciones.

[9] D.F. Walmut, *An Introduction to Wavelet Analysis*, Birkhaüser, Boston, 2002.

[10] J. Zhao, H. Ma, Z. You, M. Umeda, *Multiscale Kalman Filtering of Fractal Signals Using Wavelet Transform*, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2001), pp. 305-313.